*18 Avril 202* *Vincent Masson*

# Série des vacances de Pâques - Exercices supplémentaires

## Exercice 1: Pression dans un fluide

La pression dans un fluide à une profondeur $h$ est

$$p = p_0 + \rho_f \, g \, h$$

où $p_0$ est la pression atmosphérique à la surface $h = 0$ et $\rho_f$ la densité (massique) du fluide.

(a) Vérifiez que dans cette expression, les dimensions des membres de droite et de gauche sont les mêmes.

(b) On considère l'expérience vue en cours (figure 1). Le tuyau a une section $S$ et la largeur de ses parois est négligeable. Le disque $D$ a une masse $M$ et une surface $S_D$.

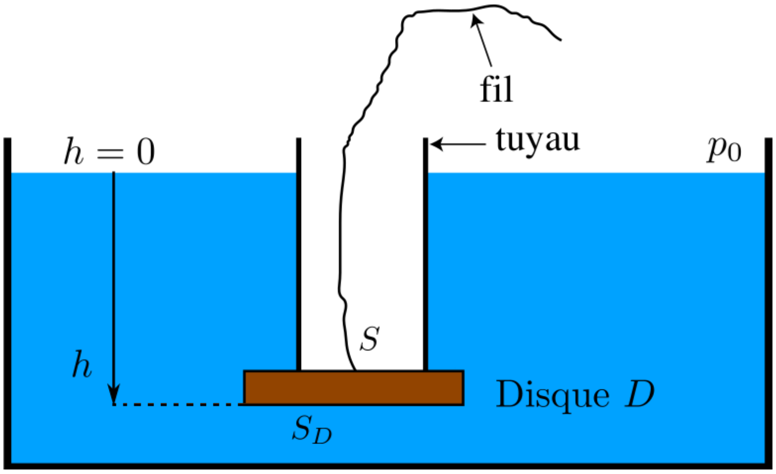



FIGURE 1 – Schéma de l'expérience vue en cours

1. On suppose le volume du disque négligeable. Pourquoi cette supposition vous simplifie-t-elle les calculs ?
2. Pour $h \geq h_{min}$ on constate que $D$ tient (on n'a pas besoin de le tenir par le fil !). Expliquez pourquoi.
3. Déterminez $h_{min}$

## Exercice 2: Tonneau de Pascal

Soit un tonneau cylindrique de rayon $R$ surmonté d'un tube de rayon $r$ (avec $r \ll R$) et de hauteur $h$. Typiquement, $h \sim 10 \ m$, $R \sim 20 \ cm$ et $r \sim 1 \ mm$. Le tonneau et le tube sont remplis d'eau de densité volumique $\rho = 1000 \ kg/m^3$. L'eau est assimilée à un liquide incompressible.

(a) Évaluez la force qui s'exerce sur le couvercle du tonneau et sa direction. Négligez les effets capillaires dans le tube.

(b) Est-ce qu'il était justifié de négliger les effets capillaires ? Supposez un angle de contact de $\theta = 40°$ et une tension superficielle de l'interface eau-air de $\gamma = 7.0 \times 10^{-2} \ N/m$.

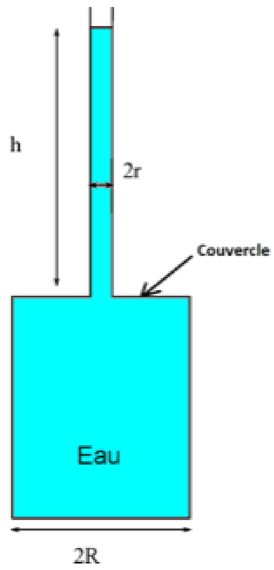


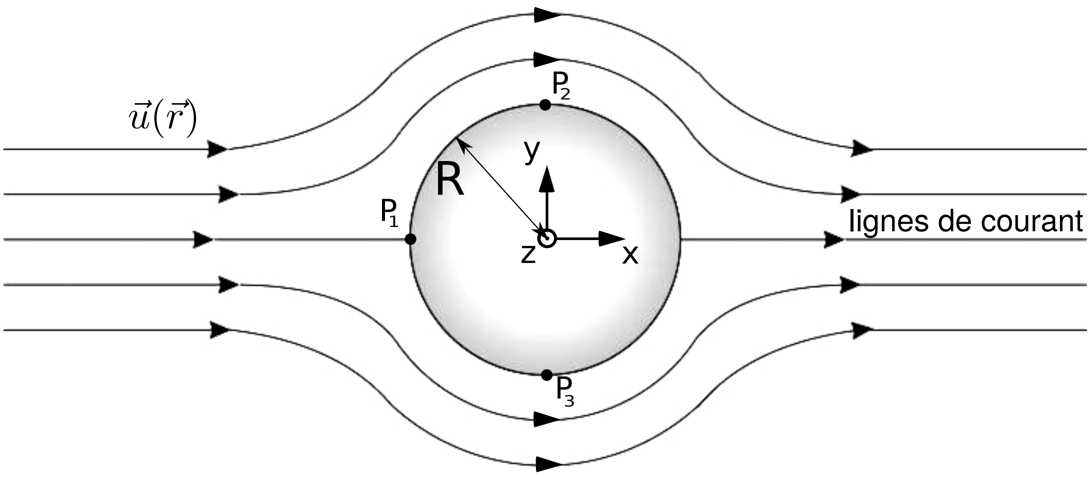

FIGURE 2 – Tonneau de Pascal.

### Exercice 3: Écoulement stationnaire d'un fluide autour d'un cylindre (Examen 2019)

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0$) autour d'un cylindre de rayon R et de longueur infinie, orienté selon l'axe $z$. Le champ de vitesse du fluide est donné par :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \left( u_0 + u_0 R^2 \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \vec{e}_x - 2u_0 R^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \vec{e}_y,$$

avec $u_0$ une constante. Les effets de gravitation sont négligeables.




(a) Quelle est la signification de $u_0$ et quelles sont ses unités en S.I. ?
*Indication : considérez le cas $|x| \to \infty$ et $|y| \to \infty$.*

(b) Trouvez la vitesse aux points $P_1$, $P_2$ et $P_3$.

(c) Démontrer que $\vec{u}(\vec{r})$ satisfait l'équation de continuité.

(d) On peut montrer que le long de l'axe $x$, l'accélération d'un élément fluide est donnée par

$$\vec{a}(x, y = 0, z) = \frac{2u_0^2 R^2}{x^3} \left( 1 - \frac{R^2}{x^2} \right) \vec{e}_x$$

À partir de l'équation d'Euler, calculez la pression $p$ le long de l'axe $x$ pour $x \in [-\infty, -R]$. La pression loin du cylindre est donnée par $p_0$. On rappelle que les effets de gravitation sont négligeables.

(e) Même question qu'en d), mais utilisez cette fois le théorème de Bernoulli. L'application du théorème de Bernoulli est-elle justifiée ?

## Exercice 4: Vaporisateur

Un vaporisateur est schématisé sur la figure 3. Le tube où circule l'air passe d'une section $S_1$ à une section $S_2 << S_1$.

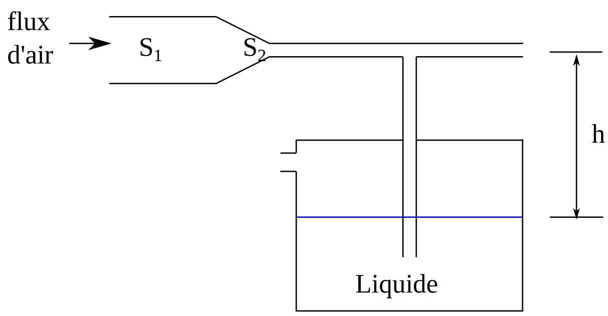



FIGURE 3 – Vaporisateur

On suppose que la vitesse, la densité et la pression des fluides considérés sont constantes dans chaque section du tube.

(a) Quelles conditions sont nécessaires pour l'application du Théorème de Bernoulli ?

(b) Expliquez pourquoi, selon le Théorème de Bernoulli, le liquide monte dans le tube vertical.

(c) Si le liquide a une densité $\rho \gg \rho_{air}$ ($\rho_{air}$ est la densité de l'air), quelle doit-être la valeur de $S_2$ pour qu'il monte à une hauteur h ?
*Indication : Supposez qu'à l'entrée $S_1$, le flux d'air a une vitesse fluide $u_1$ à la pression atmosphérique $p_0$. Utilisez le Théorème de Bernoulli*

## Exercice 5: Siphon - Cas dynamique (Examen 2018)

On considère l'arrangement dynamique suivant (figure 4), avec un bac de section $S_b$ contenant un liquide parfait incompressible de densité $\rho_L$. Le liquide s'écoule de manière stationnaire à travers le siphon (le tube courbé) de section constante $S_S$.

**Remarque :** Dans cet exercice, vous pouvez négliger les effets de capillarité.

(a) Écrire l'équation de Bernoulli pour les positions 1, 2 et 3 le long de la ligne de courant indiquée sur la figure.

(b) A partir de la question a), calculez la vitesse à la position 3) et la pression à la position 2).
*Indication : Comme $S_b >> S_S$, vous pouvez négliger la vitesse du liquide à la position 1*

(c) Quelle est la pression à la position 4 ? Est-elle la même qu'à la position 1 ?

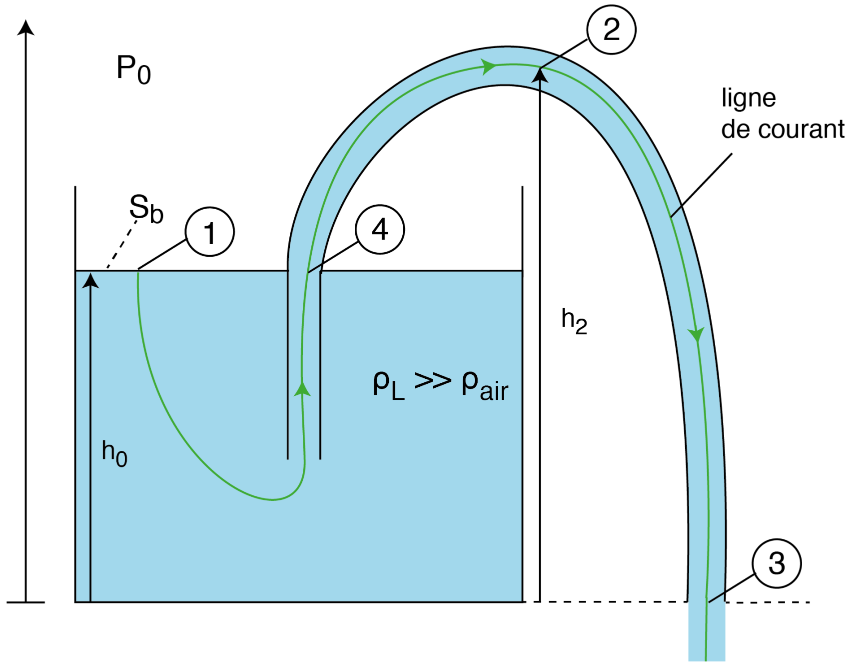



FIGURE 4 – Schéma du dispositif

### Exercice 6: Propagation d'une onde plane

On considère une onde sinusoïdale plane qui, dans la notation complexe, est donnée par :

$$\widetilde{y_0}(\vec{k},t) = \widetilde{A}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

(a) Dessinez les plans équiphases qui ont une phase $\Phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = 0$ , $\Phi = \pi$ et $\Phi = 2\pi$ dans le plan $xy$ à $t = 0$ et à $t = \frac{\pi}{3\omega}$. Supposez que $\widetilde{A} = 10$ et que $\vec{k} = (k, 0, 0)$ avec $k = \frac{2\pi}{3}$.

(b) Quelle est la valeur de $\widetilde{y_0}$ sur les trois plans équiphases dessinés en $(a)$ ?

(c) Répétez la partie $(a)$ pour le cas $\vec{k} = (-k, 0, 0)$, $k = \frac{2\pi}{3}$.

(d) En se basant sur les résultats de $(a)$ et $(c)$, expliquez quel est le lien entre la direction de la propagation de l'onde et le vecteur $\vec{k}$.

### Exercice 7: Effet de pointe

On considère un conducteur sphérique de rayon $R$ et de charge $Q$.

(a) Utilisez la loi de Gauss pour trouver le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

(b) Calculez le potentiel électrostatique partout dans l'espace en utilisant la relation suivante, vue en cours :

$$\phi(B) - \phi(A) = -\int_{A\to B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Choisissez la constante libre du potentiel telle que $\phi(\vec{r}) \to 0$ quand $\vec{r} \to \infty$.

(c) On suppose maintenant que ce conducteur sphérique est maintenu à un potentiel $V$ fixé, par exemple à l'aide d'une pile électrique. Exprimez le champ électrique à la surface de la sphère en fonction de $R$. Qu'est ce vous constatez si $R \to 0$ ?